

椭圆型柔性铰链闭式扭转柔度研究

李立建,张 丹

(北京交通大学 机械与电子控制工程学院,北京 100044)

摘 要:针对变矩形截面梁扭转柔度难以解析求解问题,基于矩形截面梁扭转柔度公式及利用微分和积分思想,采用非线性曲线拟合方法得到了可用于推导变矩形截面梁闭式扭转柔度的设计公式,解决了变矩形截面梁扭转柔度不可积或可积情况下精度较低的问题,并用于解析推导椭圆型柔性铰链闭式扭转柔度公式.通过数值算例和有限元对闭式解析结果进行验证,并分析了结构参数对柔性铰链扭转柔度的影响,结果表明:闭式解与数值解结果一致,与有限元结果相比相对误差小于 7.5%,且当铰链宽度和最小槽口厚度较小时对扭转柔度的影响较大,从而为变矩形截面柔性铰链受扭转力矩时的尺寸优化及结构设计奠定理论基础.

关键词:柔性铰链;扭转柔度;变截面;曲线拟合

中图分类号:TH132 **文献标志码:**A

Research on closed-form torsional compliance of elliptical flexure hinges

LI Lijian, ZHANG Dan

(School of Mechanical, Electronic and Control Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract: Aiming at the problem that the torsional compliance of variable rectangle cross-section (VRC) beams is difficult to formulate, based on the existing equations for torsional compliance of rectangular cross-section beams and the use of calculus, a design formula used for deriving the closed-form torsional compliance of VRC beams is obtained by using nonlinear curve fitting method, which solves the problem of non-integrability or low-precision under integrable condition for torsional compliance of VRC beams. It is applied in analytical derivation of the equation for closed-form torsional compliance of elliptical flexure hinges. The closed-form solutions are validated through the numerical examples and finite element simulations, and the effect of structural parameters on torsional compliance of flexure hinges is also analyzed. The results show that the analytical results are consistent with the numerical results, and the relative errors are smaller than 7.5% compared with the finite element results. When the width and minimum-thickness values of flexure hinges are relatively small, they have a larger impact on the torsional compliance, which lays a theoretical foundation for size optimization and structural design of VRC flexure hin-

收稿日期:2017-07-12
基金项目:国家自然科学基金(51505023);中央高校基本科研业务费专项资金(2014RC035)
Foundation items: National Natural Science Foundation of China (51505023); Fundamental Research Funds for the Central Universities (2014RC035)
第一作者:李立建(1986—),男,河南周口人,博士生.研究方向为柔性机构.email:16116363@bjtu.edu.cn.
引用格式:李立建,张丹. 椭圆型柔性铰链闭式扭转柔度研究[J].北京交通大学学报,2018,42(3):134—140.
LI Lijian, ZHANG Dan. Research on closed-form torsional compliance of elliptical flexure hinges [J]. Journal of Beijing Jiaotong University, 2018, 42(3):134—140. (in Chinese)

ges under torsion load.

Keywords: flexure hinge; torsional compliance; variable cross-section; curve fitting

柔性铰链或弹性铰链是构建柔性机构或柔顺机构的基本运动单元,而且可以在运动传递时利用自身柔性或弹性获取一部分运动^[1].柔性铰链与传统运动副相比,具有较高的定位精度,并且无摩擦间隙、无需润滑及免于装配等诸多优点,因而在多维加速度传感器^[2]、微动机构^[3]或柔顺微动平台^[4]、精密器械、MEMS 系统、陀螺仪^[5]等领域应用广泛,极大地提高了器件、机构或构件等精密度。

柔性铰链作为精密及高精密柔性或全柔性并联机构的关键关节,对其进行空间形式的刚度或柔度建模是研究柔性或全柔性并联机构末端运动及力学特性的基础.Paros 等^[6]早在 1956 年就研究和给出了圆弧型柔性铰链的弯曲、扭转和拉压刚度的设计及简化计算公式.吴鹰飞等^[7]推导了圆弧型柔性铰链系列柔度解析计算公式.Yong 等^[8]通过建立直圆型柔性铰链的有限元模型,将槽口间距与切割半径之比作为拟合系数,并基于有限元仿真结果拟合得到了槽口间距与切割半径在某一比值区间内精度较高的直圆型柔性铰链线柔度计算公式.陈贵敏等^[9-10]通过将椭圆离心角作为积分变量推导了椭圆型柔性铰链的系列柔度计算公式.刘平安等^[11]基于卡氏第二位移定理推导了双曲余弦曲线柔性铰链的平面柔度解析表达式.然而,现有对柔性铰链空间柔度建模的研究中,对柔性铰链扭转柔度设计公式的研究相对较少,主要原因是矩形截面梁扭转柔度公式形式复杂^[12].虽然数值积分或数值算法能在较高精度范围内有效求解变矩形截面梁的扭转柔度,但计算量大且费时费力,而且在结构优化设计时很难获取扭转柔度与变矩形截面结构参数间的解析关系,从而极大地限制了柔性铰链在此场合下的应用.Lobontiu 等^[13]通过将矩形截面梁的扭转柔度公式进行简化,求解得到几种不同切口形式的变矩形截面柔性铰链的闭式扭转柔度方程,但在一定情况下有较大的舍入误差.Chen 等^[14]通过对现有变矩形截面梁扭转柔度计算精度进行分析的基础上,将计算误差作为修正关于槽口宽度及厚度对称扭转柔度公式的数据源,拟合得到修正误差函数,并以该函数在变矩形截面梁槽口所在最小横截面处的值作为修正系数,得到两个通用的变矩形截面梁扭转柔度公式,具有较高的计算精度,但仍是近似等效,未能完全解析。

本文作者从矩形截面梁扭转柔度设计公式出发,通过对精确的矩形截面梁等效量级数公式和近

似公式的分析,利用 Matlab 软件自带的曲线拟合工具箱,得到可用于积分求解变矩形截面梁的矩形截面梁扭转柔度等效量公式,并将之用于椭圆型柔性铰链扭转柔度公式的解析计算上.最后,结合具体数值算例和有限元模型对所求解结果的精度进行了分析,并研究了结构参数对柔性铰链扭转柔度的影响。

1 椭圆型柔性铰链结构特点

椭圆型柔性铰链可通过慢走丝线切割的方法,沿等矩形截面杆宽度方向,切除两块对称的由半椭圆围成的封闭区域内的材料得到,其结构示意图如图 1 所示.其中, $O-xyz$ 是在椭圆型柔性铰链左端刚性杆与其接触的矩形截面几何中心上建立的总体坐标系, x 轴取矩形截面法线方向并指向柔性铰链自由端, z 轴与矩形截面宽度方向平行, y 轴满足右手定则.参数 w 和 L 分别为椭圆型柔性铰链的槽口宽度和长度, t 和 t_0 分别为最大和最小横截面槽口厚度, $t(x)$ 为沿 x 方向上椭圆型柔性铰链厚度变化的形状函数。

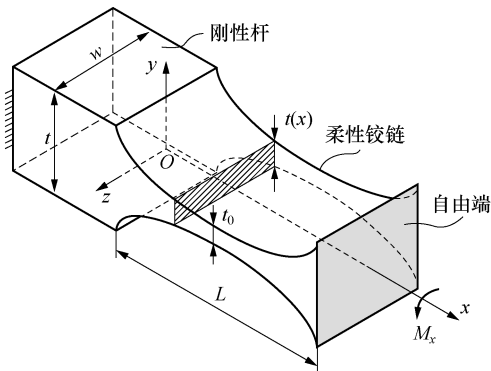


图 1 椭圆型柔性铰链示意图

Fig.1 Schematic diagram of elliptical flexure hinge

由图 1 可知,椭圆型柔性铰链是典型的变矩形截面梁,当其自由端作用于绕 x 轴方向的扭矩 M_x 时,由于沿 x 轴方向铰链矩形截面厚度相对其宽度不断发生变化,进而导致椭圆型柔性铰链自由端相对于固定端产生的相对角变形,利用现有的扭转柔度公式难以解析给出^[12].然而,基于微分和积分思想,其角变形可由沿铰链长度方向上划分的无数微段矩形截面梁在扭矩作用下产生的相对应的角变形经线性叠加得到.因此,矩形截面梁扭转柔度设计公式的具体形式将是解决变矩形截面柔性铰链闭式扭转柔度的基础和重要突破口。

2 变矩形截面梁扭转柔度计算

2.1 矩形截面梁扭转柔度公式设计

针对矩形截面梁,由于其沿长度方向上横截面的宽度和厚度保持不变,故基于卡式第二定理可知:矩形截面梁在扭矩作用下自由端产生的角变形可通过其扭转柔度来解析,其扭转柔度通用形式为

$$C = \frac{\alpha_x}{M_x} = \frac{L}{GI_E} \tag{1}$$

式中: I_E 可看作是与横截面的几何形状有关的等效量; G 为矩形截面梁选用材料的剪切弹性模量; α_x 为矩形截面梁自由端在扭矩 M_x 作用下产生的角变形.针对不同的截面几何形状,等效量 I_E 的计算方式不同.对于圆截面, I_E 就是其极惯性矩 J_p ; 对于矩形截面,则需要根据宽度 w 和厚度 t 比值的变化来确定其具体的计算公式.当 $w \geq t$ 时,可利用级数形式来精确求解等效量,并用 I_S 表示如下^[15]

$$I_S = wt^3 \left[\frac{1}{3} - \frac{64t}{\pi^5 w} \sum_{n=1}^{2m+1} \frac{1}{n^5} \tanh\left(\frac{\pi n w}{2t}\right) \right] \tag{2}$$

分析式(2)可发现:当 $w \geq t$ 时,随项数 n ($n \geq 3$) 的增大,双曲正切函数 $\tanh(\pi n w / 2t)$ 逐渐趋于 1,且由于系数 $1/n^5$ 收敛较快,故利用级数求解矩形截面梁等效量较为简易且精度较高;对于变矩形截面梁,由于 $t(x)$ 在积分时作为分母存在高阶项,导致积分解析复杂或只能得到数值解.但是,式(2)可作为矩形截面梁精确等效量计算公式判定其他等效量近似公式计算精度的依据.同时,当 $w < t$ 时,只需将式(2)中 w 和 t 进行互相调换即可.

基于上述分析,在确保精度条件下,舍弃式(2)高阶项 ($n > 3$) 并整理,可得矩形截面较为精确的等效量近似计算公式,并用 I_Y 表示如下^[12]

$$I_Y = wt^3 \left[\frac{1}{3} - 0.21 \frac{t}{w} \left(1 - \frac{t^4}{12w^4} \right) \right] \tag{3}$$

对式(3)进行分析可知,中括号内的计算式是以厚宽比 t/w 为参变量的一元五次多项式,但仍存在高阶项.为便于将式(1)用于变矩形截面梁扭转柔度的解析求解,以 t/w 为参变量对式(3)中括号内的多项式进行非线性拟合,以解决变矩形截面梁扭转柔度积分难以解析的问题.经过分析,利用 Matlab 对上述一元五次多项式进行非线性比例多项式拟合.其中,拟合的数据源由式(2)给出,最终得到的可用于变矩形截面梁扭转柔度解析求解的矩形截面梁等效量计算公式为

$$I_{CF} = \frac{1.053w^4 t^3}{t^3 + 1.408wt^2 + 1.937w^2 t + 3.16w^3} \tag{4}$$

将 I_Y 和 I_{CF} 与 I_S 结果相比较,得到的相对误差随 t/w 的变化曲线如图 2 所示.

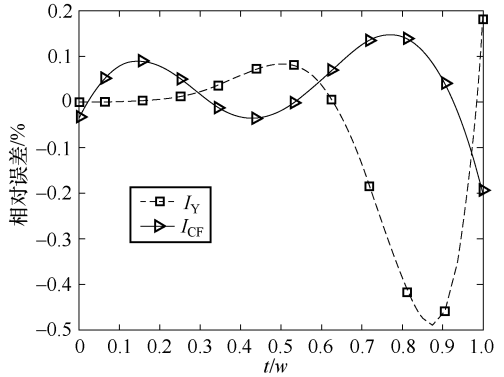


图 2 相对误差随 t/w 变化

Fig.2 Relative errors change with the value of t/w

由图 2 可知,当 $t/w \in (0, 0.7]$ 时, I_Y 和 I_S 相对误差在 $\pm 0.2\%$ 以内,但随 t/w 比值增大,两者偏差逐渐增加,相对误差在 $\pm 0.49\%$ 以内.其主要原因是当 t/w 比值较大时,忽略了高阶项带来的相对较大的舍入误差.而 I_{CF} 在 $t/w \in (0, 1]$ 区间的相对误差变化平缓,始终保持在 $\pm 0.2\%$ 以内.故式(4)作为矩形截面梁等效量计算公式有较高的计算精度,且可用于变矩形截面梁扭转柔度的解析计算上.

2.2 变矩形截面梁扭转柔度计算

在进行变矩形截面梁扭转柔度解析计算前,需设定宽度 w 为定值,根据厚宽比情况进行讨论.

根据式(1)可得变矩形截面梁扭转柔度公式为

$$C = \frac{\alpha_x}{M_x} = \frac{1}{G} \int_0^L \frac{1}{I_E(x)} dx = \frac{1}{G} I \tag{5}$$

式中: I 为中间量,其表达式为等效量 $I_E(x)$ 的倒数沿变矩形截面梁长度上的定积分.由式(5)可知,求变矩形截面梁扭转柔度可转化为求中间量 I .

当 $w \geq t(x)$ 时,将 $I_{CF}(x)$ 替换式(5)中间量 I 中的等效量 $I_E(x)$ 并整理可得

$$I = \frac{0.9497}{w^4} I_0 + \frac{1.3371}{w^3} I_1 + \frac{1.8395}{w^2} I_2 + \frac{3.0009}{w} I_3 \tag{6}$$

式中: $I_0 \sim I_3$ 为积分因子,其计算式分别为

$$\begin{cases} I_0 = \int_0^L dx \\ I_1 = \int_0^L \frac{1}{t(x)} dx \\ I_2 = \int_0^L \frac{1}{t^2(x)} dx \\ I_3 = \int_0^L \frac{1}{t^3(x)} dx \end{cases} \tag{7}$$

当 $w < t(x)$ 时,调换式(4)中 w 和 t 的位置,可得等效量的计算公式如下

$$I'_{\text{CF}} = \frac{1.053\omega^3 t^4}{3.16t^3 + 1.937\omega t^2 + 1.408\omega^2 t + \omega^3} \quad (8)$$

将 $I'_{\text{CF}}(x)$ 替换式(5)中的 $I_E(x)$ 并整理得

$$I = \frac{3.0009}{\omega^3} I_1 + \frac{1.8395}{\omega^2} I_2 + \frac{1.3371}{\omega} I_3 + 0.9497 I_4 \quad (9)$$

式中: I_4 为积分因子,其计算式为

$$I_4 = \int_0^L \frac{1}{t^4(x)} dx \quad (10)$$

由式(6)和式(9)可看出,对于等宽度变矩形截面梁来说,其扭转柔度的解析计算转化为由 $t(x)$ 的幂次组成的系列被积函数的积分问题,因而式(6)和式(9)能更好地应用于各种具有变矩形截面特性的梁或柔性铰链的场合.同时,上述公式解决了在较高拟合精度条件下变矩形截面梁扭转柔度计算过程中的不可积问题或可积情况下精度较低的问题.

3 椭圆型柔性铰链扭转柔度计算

椭圆型柔性铰链沿轴线方向上的平面微元划分如图3所示.其中,参数 a 和 b 为铰链两对称槽口用椭圆曲线的长半轴和短半轴, θ 为引入的椭圆离心角,也是进行积分计算时的积分变量.

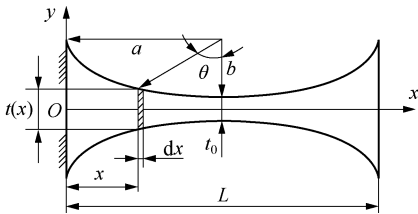


图3 椭圆型柔性铰链 xy 平面视图

Fig.3 Planar xy view of elliptical flexure hinge

由图3可得

$$t(x) = 2b + t_0 - 2b \sqrt{1 - (x-a)^2/a^2} \quad (11)$$

令 $x = a + a \sin \theta$, 则 $dx = a \cos \theta d\theta$ 且 $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, 于是式(11)可重新整理为

$$t(\theta) = 2b(1 + \xi - \cos \theta) \quad (12)$$

式中: $\xi = t_0/2b$. 当 $t_0 < \omega < t$ 时,椭圆型柔性铰链将划分为 $\omega \geq t(\theta)$ 段和 $\omega < t(\theta)$ 段,此时需同时利用式(6)和式(9)来计算中间量 I .通过利用扭矩的作用和铰链关于最小横截面的对称性,仅需计算在积分区间 $[0, \theta_e]$ 和 $[\theta_e, \pi/2]$ 上的积分因子即可.其中, θ 取值 θ_e 满足 $t(\theta_e) = \omega$ 且 $\theta_e = \arccos(1 + \xi - \omega/(2b))$.

对于 $\omega \geq t(\theta)$ 段,将式(12)和 $\theta \in [0, \theta_e]$ 代入式(7)可得积分因子为

$$\begin{cases} I_0 = 2a \sin \theta_e \\ I_1 = aF_1(\theta_e)/b \\ I_2 = 0.5aF_2(\theta_e)/b^2 \\ I_3 = 0.25aF_3(\theta_e)/b^3 \end{cases} \quad (13)$$

对于 $\omega < t(\theta)$ 段,将式(12)和 $\theta \in [\theta_e, \pi/2]$ 代入式(7)和式(10)可得积分因子为

$$\begin{cases} I_1 = a \{F_1(\pi/2) - F_1(\theta_e)\}/b \\ I_2 = 0.5a \{F_2(\pi/2) - F_2(\theta_e)\}/b^2 \\ I_3 = 0.25a \{F_3(\pi/2) - F_3(\theta_e)\}/b^3 \\ I_4 = 0.125a \{F_4(\pi/2) - F_4(\theta_e)\}/b^4 \end{cases} \quad (14)$$

式中: $F_k(\theta)$ ($k=1, 2, 3, 4$) 为积分因子 $I_1 \sim I_4$ 对应定积分上限 θ 的函数,其解析式分别为

$$F_1(\theta) = \frac{2(1+\xi) \arctan(\sqrt{(\xi+2)/\xi} \tan(\theta/2))}{\sqrt{\xi(\xi+2)}} - \theta \quad (15)$$

$$F_2(\theta) = \frac{2 \arctan(\sqrt{(\xi+2)/\xi} \tan(\theta/2))}{(\xi(\xi+2))^{(3/2)}} + \frac{(1+\xi) \sin \theta}{\xi(\xi+2)(1+\xi - \cos \theta)} \quad (16)$$

$$F_3(\theta) = \frac{3(\xi+1) \arctan(\sqrt{(\xi+2)/\xi} \tan(\theta/2))}{(\xi(\xi+2))^{(5/2)}} + \frac{(\cos \theta + 1)^2 \tan(\theta/2)}{4\xi^2(\xi+2)^2(1+\xi - \cos \theta)^2} (2\xi^3 + 7\xi^2 + 9\xi + 6) \tan^2(\theta/2) + 2\xi^3 + 5\xi^2 + 5\xi \quad (17)$$

$$F_4(\theta) = \frac{(4\xi^2 + 8\xi + 5) \arctan(\sqrt{(\xi+2)/\xi} \tan(\theta/2))}{(\xi(\xi+2))^{(7/2)}} + \frac{(1 + \cos \theta)^3}{8(1 + \xi - \cos \theta)^3} \times \left[\frac{(2\xi^3 + 8\xi^2 + 16\xi + 11) \tan(\theta/2)}{\xi(\xi+2)^3} + \frac{4(3\xi^3 + 9\xi^2 + 16\xi + 10) \tan^3(\theta/2)}{3\xi^2(\xi+2)^2} + \frac{(2\xi^3 + 4\xi^2 + 8\xi + 5) \tan^5(\theta/2)}{\xi^3(\xi+2)} \right] \quad (18)$$

当 $\omega \geq t$ 或 $\omega < t_0$ 时,将式(12)代入式(7)和式(10)可得积分因子为

$$\begin{cases} I_0 = 2a \\ I_1 = aF_1(\pi/2)/b \\ I_2 = 0.5aF_2(\pi/2)/b^2 \\ I_3 = 0.25aF_3(\pi/2)/b^3 \\ I_4 = 0.125aF_4(\pi/2)/b^4 \end{cases} \quad (19)$$

将式(13)、式(14)和式(19)分别代入式(6)和式(9)可求得不同厚宽比情况下的中间量 I ,再由式(5)便可解析得到椭圆型柔性铰链的扭转柔度.另

外,若 $a=b=r$,则椭圆型柔性铰链的扭转柔度公式可用于直圆型柔性铰链的扭转柔度计算.

4 数值算例及仿真

4.1 数值验证

为验证上述解析得到的椭圆型柔性铰链扭转柔度公式的正确性,结合文献[14]给出的铰链材料属性弹性模量 $E=207\text{ GPa}$ 、 $G=81\text{ GPa}$ 和结构参数 $t_0=0.8\text{ mm}$ 、 $a=5\text{ mm}$,利用不同公式得到的不同

铰链结构参数的柔性铰链扭转柔度计算结果见表 1. 其中,前 10 组和后 10 组算例分别对应直圆型和椭圆型柔性铰链, C_s 为由式(2) 用于变矩形截面柔性铰链得到的扭转柔度数值解, C_c 和 C_{cs} 分别为文献[14] 改进后柔性铰链扭转柔度公式得到的近似解, C_{cf} 为本文解析得到变矩形截面柔性铰链扭转柔度的闭式解.椭圆型和直圆型柔性铰链各扭转柔度计算结果与 C_s 结果的相对误差曲线见图 4.

表 1 不同柔性铰链的扭转柔度

Tab.1 Torsional compliances of different flexure hinges

序号	w/mm	b/mm	$C_s/(\text{rad}/\text{N}\cdot\text{m})$	$C_{cf}/(\text{rad}/\text{N}\cdot\text{m})$	$C_c/(\text{rad}/\text{N}\cdot\text{m})$	$C_{cs}/(\text{rad}/\text{N}\cdot\text{m})$
1	0.01	5	212 995	213 030	212 559	213 215
2	0.08	5	431.74	431.51	432.10	440.28
3	0.50	5	2.324 0	2.323 2	2.323 2	2.386 9
4	0.70	5	0.996 5	0.995 7	0.996 7	1.015 5
5	0.80	5	0.727 9	0.727 8	0.728 2	0.738 8
6	10.80	5	0.016 47	0.016 45	0.016 49	0.016 32
7	11.00	5	0.016 15	0.016 13	0.016 17	0.016 01
8	15.00	5	0.011 64	0.011 63	0.011 65	0.011 56
9	20.00	5	0.008 63	0.008 63	0.008 64	0.008 58
10	50.00	5	0.003 38	0.003 38	0.003 38	0.003 37
11	0.01	3	252 230	252 269	251 724	252 416
12	0.08	3	512.35	512.06	512.86	521.42
13	0.50	3	2.798 5	2.797 7	2.797 4	2.860 7
14	0.70	3	1.209 2	1.208 2	1.209 4	1.227 3
15	0.80	3	0.886 5	0.886 5	0.886 9	0.896 7
16	10.80	3	0.020 93	0.020 91	0.020 55	0.020 36
17	11.00	3	0.020 52	0.020 51	0.020 55	0.020 36
18	15.00	3	0.014 80	0.014 79	0.014 82	0.014 71
19	20.00	3	0.010 98	0.010 97	0.010 98	0.010 92
20	50.00	3	0.004 31	0.004 30	0.004 30	0.004 29

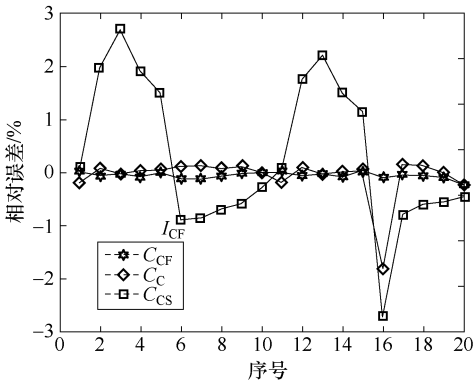


图 4 相对误差曲线

Fig.4 Relative error curves

从图 4 可看出:利用本文所得到的椭圆型和直圆型柔性铰链扭转柔度闭式解与近似解相比具有更高精度,并且与级数形式的柔性铰链扭转柔度数值解基本一致,相对误差在 $\pm 0.23\%$ 以内.

4.2 有限元验证

不失一般性,给出两组不同的椭圆型和直圆型

柔性铰链尺寸参数,见表 2,并利用有限元分析软件 ANSYS 15.0 对本文得到的柔性铰链扭转柔度的解析结果进行仿真验证.表 2 中,算例 1 的有限元网格划分模型见图 5.模型左端固定,右端施加 $1\text{ N}\cdot\text{mm}$ 的作用扭矩,网格单元选用高阶 3 维 20 节点的 Solid 186 单元,材料属性为 $E=207\text{ GPa}$ 、 $G=81\text{ GPa}$.由本文得到的解析解 C_{cf} 、仿真值 C_{FEM} 及相对误差如表 2 所示.

表 2 解析和有限元结果对比

Tab.2 Comparison between the analytical and the finite element results

算例	w/mm	t_0/mm	a/mm	b/mm	$C_{FEM}/(\text{rad}/\text{N}\cdot\text{m})$	$C_{cf}/(\text{rad}/\text{N}\cdot\text{m})$	相对误差/%
1	2.0	1.2	2.0	1.0	0.039 8	0.042 0	5.24
2	2.4	1.3	3.0	2.0	0.029 5	0.031 6	6.65
3	2.0	1.2	2.0	2.0	0.031 8	0.033 6	5.36
4	2.4	1.3	3.0	3.0	0.025 2	0.027 2	7.35

由表 2 可知:解析与有限元结果相对误差在 7.5% 以内,两者结果吻合较好,进一步说明了本文

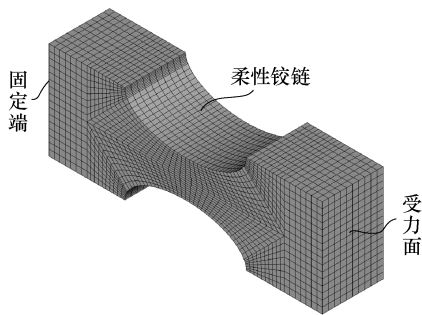


图 5 有限元网格模型

Fig.5 Finite element mesh model

所得椭圆型柔性铰链闭式扭转柔度具有较高的求解精度。

4.3 结构参数对柔性铰链扭转柔度的影响

利用前面所推导的椭圆型柔性铰链闭式扭转柔度公式可得,柔性铰链的结构参数 w 和 t_0 及 a 和 b 对其扭转柔度的影响趋势分别如图 6 和图 7 所示。

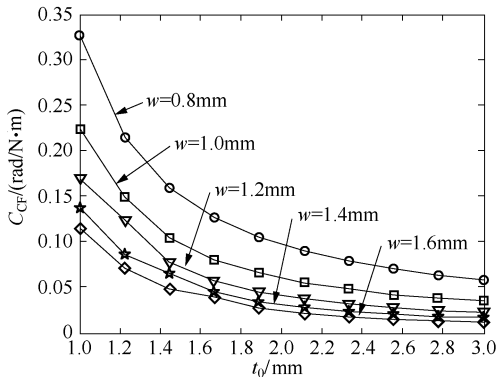


图 6 扭转柔度随参数 w, t_0 的变化

Fig.6 Variations of C_{CF} in terms of w and t_0

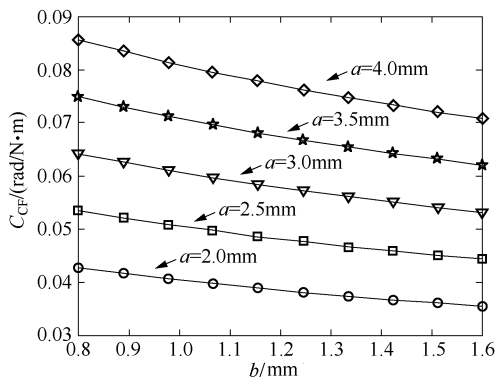


图 7 扭转柔度随参数 a, b 的变化

Fig.7 Variations of C_{CF} in terms of a and b

从图 6 和图 7 可得出:椭圆型柔性铰链扭转柔度随着 w, t_0, b 的增大而减小,并且随 t_0 呈非线性变化,随 b 近似呈线性变化,与 a 呈正相关变化.在所有结构参数中,当 w 和 t_0 尺寸较小时,对柔性铰链扭转柔度的影响较为显著,随着两者尺寸的逐渐增加,对扭转柔度的影响越来越小。

5 结论

1) 基于非线性曲线拟合方法得到了可解析求解变矩形截面梁扭转柔度的矩形截面梁等效量计算公式,与精确的等效量级数公式相比,相对误差小于 2%,因而具有较高的拟合精度。

2) 将变矩形截面梁扭转柔度解析问题转化为解析求解关于其厚度形状函数幂次倒数的系列定积分问题,进而解决了变矩形截面梁扭转柔度不可积或可积情况下精度较低的问题。

3) 解析推导了椭圆型柔性铰链闭式的扭转柔度公式,并分析了其结构参数对其扭转柔度的影响,结果表明:较小的 w 和 t_0 有益获取较大的扭转柔度,而 a 和 b 对扭转柔度的影响较小。

参考文献 (References):

[1] HOWELL L L. Compliant mechanisms[M]. New York: John Wiley and Sons, 2001.

[2] GAO Z, ZHANG D. Design, analysis and fabrication of a multidimensional acceleration sensor based on fully decoupled compliant parallel mechanism[J]. Sensors and Actuators A: Physical, 2010, 163(1): 418—427.

[3] 郭盛, 王泽伟, 李凌杰, 等. 红外热像仪微扫组件的模式分析[J]. 北京交通大学学报, 2014, 38(4): 51—55. GUO Sheng, WANG Zewei, LI Lingjie, et al. A model analysis of the infrared thermal imager micro components[J]. Journal of Beijing Jiaotong University, 2014, 38(4): 51—55. (in Chinese)

[4] QU J L, CHEN W H, ZHANG J B, et al. A piezo-driven 2-DOF compliant micropositioning stage with remote center of motion [J]. Sensors and Actuators A: Physical, 2016, 239: 114—126.

[5] 荣伟斌, 陈涛, 陈立国, 等. 挠性陀螺十字铰链模型的建立与分析[J]. 光学精密工程, 2006, 14(5): 864—869. RONG Weibin, CHEN Tao, CHEN Liguoguo, et al. Establishment and analysis of cross model of flexible gyro [J]. Optics and Precision Engineering, 2006, 14(5): 864—869. (in Chinese)

[6] PAROS J M, WEISBORD L. How to design flexure hinges[J]. Machine Design, 1965, 37: 151—156.

[7] 吴鹰飞, 周兆英. 柔性铰链的设计计算[J]. 工程力学, 2002, 19(6): 136—140. WU Yingfei, ZHOU Zhaoying. Design of flexure hinges [J]. Engineering Mechanics, 2002, 19(6): 136—140. (in Chinese)

[8] YONG Y K, LU T F, HANDLEY D C. Review of circular flexure hinge design equations and derivation of

empirical formulations[J]. Precision Engineering, 2008, 32(2): 63–70.

[9] 陈贵敏, 刘小院, 贾建援. 椭圆柔性铰链的柔度计算[J]. 机械工程学报, 2006, 42(增): 111–115.
CHEN Guimin, LIU Xiaoyuan, JIA Jianyuan. Compliance calculation of elliptical flexure hinge[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2006, 42(S): 111–115. (in Chinese)

[10] 陈贵敏, 韩琪. 深切口椭圆柔性铰链[J]. 光学精密工程, 2009, 17(3): 570–575.
GHEN Guimin, HAN Qi. Deep-notch elliptical flexure hinges[J]. Optics and Precision Engineering, 2009, 17(3): 570–575. (in Chinese)

[11] 刘平安, 方跃法. 双曲余弦曲线轮廓柔性关节的设计与分析[J]. 北京交通大学学报, 2008, 32(1): 104–107.
LIU Ping'an, FANG Yuefa. Design and analysis of compliant joints with hyperbolic cosine profiles [J]. Journal of Beijing Jiaotong University, 2008, 32(1): 104–107. (in Chinese)

[12] YONG W C, BUDYNAS R G. Roark's formulas for stress and strain[M]. 7th ed. New York: McGraw Hill, 2002: 401–416.

[13] LOBONTIU N, GARCIA E, CANFIELD S. Torsional stiffness of several variable rectangular cross-section flexure hinges for macro-scale and MEMS applications [J]. Smart Materials and Structures, 2004, 13(13): 12–19.

[14] CHEN G M, HOWELL L L. Two general solutions of torsional compliance for variable rectangular cross-section hinges in compliant mechanisms[J]. Precision Engineering, 2009, 33(3): 268–274.

[15] TIMOSHENKO S, GOODIER J N. Theory of elasticity [M]. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1951: 275–278.



(上接第 133 页)

[11] XU J, XU Z, HUANG S, et al. Effect of wall function in numerical study on turbulent impinging jet [J]. Transactions of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2001, 18(1): 29–34.

[12] 周欣, 杨爱明, 翁培奋. 低雷诺数下翼型粘性绕流主动流动控制的数值模拟[J]. 上海大学学报(自然科学版), 2007, 13(2): 193–196.
ZHOU Xin, YANG Aiming, WENG Peifen. Simulation of active flow control on viscous flow around airfoil under low Reynolds number[J]. Journal of Shanghai University(Natural Science), 2007, 13(2): 193–196. (in Chinese)

[13] 胡隐樵, 陈晋北, 左洪超. 湍流强度定理和湍流发展的宏观机制[J]. 中国科学, 2007, 37(2): 272–281.
HU Yinqiao, CHEN Jinbei, ZUO Hongchao. The turbulence intensity theorem and the macroscopic mechanism of turbulent development [J]. Science China Press, 2007, 37(2): 272–281. (in Chinese)