文章编号:1673-0291(2017)03-0114-06 **DOI**:10.11860/j.issn.1673-0291.2017.03.018

Bernoulli 试验中 k 阶概率分布的众数

邵吉光,王 军

(北京交通大学 理学院,北京 100044)

摘 要:分别讨论了 k 阶负二项分布 $NB_k(r,p)$ 当参数 $p=0.5$, $k=2$ 时的众数及 k 阶 Poisson 分布 $P_k(\lambda)$ 在参数 λ 和 k 取某些特定值时的众数.同时提出一个关于 k 阶二项分布 $B_k(n,p)$ 众数的猜想.

关键词:系统可靠性;k 阶分布;众数;概率母函数;分布律;Fibonacci 数列

中图分类号:TB114;O211.9 **文献标志码**:A

On the modes of distributions of order k in Bernoulli trials

SHAO Jiguang, *WANG Jun*

(School of Science, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract: The modes of the negative binomial distribution of order k and the Poisson distribution of the same order are investigated for some fixed parameters. Furthermore, a conjecture on the mode of the binomial distribution of order k is offered.

Keywords: system reliability; distribution of order k; mode; probability generating function; probability distribution function; Fibonacci sequence

在成功参数为 $p(0<p<1)$ 的独立 Bernoulli 试验序列中,以 $X_{k,r}$ 表示长度为 k 的成功游程[1-7]发生 r 次的试验次数(等待时间),称随机变量 $X_{k,r}$ 服从参数为 (r,p) 的 k 阶负二项分布,记作 $NB_k(r,p)$[8-13].关于该分布,有下面的结论[11,14]:

引理 1 设随机变量 $X_{k,r}\sim NB_k(r,p)$,则 $X_{k,r}$ 的概率母函数为

$$G(X_{k,p};x)=\left(\frac{p^k x^k(1-px)}{1-x+qp^k x^{k+1}}\right)^r.$$

另外,从 k 阶负二项分布 $NB_k(r,p)$ 出发,可以导出 k 阶 Poisson 分布 $P_k(\lambda)$ 的概率母函数及其概率分布律[9,14]:

引理 2 设随机变量 $Z_k\sim P_k(\lambda)$,则 Z_k 的概率母函数为

$$G(Z_k;x)=e^{\lambda(x+x^2+\cdots+x^k-k)},$$

Z_k 的概率分布律为

$$P(Z_k=m)=\sum_{\substack{(m_1,m_2,\cdots,m_k)\\ m_1+2m_2+\cdots+km_k=m}}\frac{\lambda^{m_1+m_2+\cdots+m_k}}{m_1!\ m_2!\ \cdots m_k!}e^{-\lambda k},m=0,1,\cdots.$$

在参数为 p 的 n 重独立 Bernoulli 试验中,以 $N_n^{(k)}$ 表示长度为 $k(\leqslant n)$ 的成功游程发生的次数,则称随机变量 $N_n^{(k)}$ 服从参数为 (n,p) 的 k 阶二项分布,记作 $N_n^{(k)}\sim B_k(n,p)$.仍从 k 阶负二项分布 $NB_k(r,p)$ 出发,可以辗转导出随机变量 $N_n^{(k)}$ 的概率分布律[2]和数学期望如下[15]:

引理 3 设随机变量 $N_n^{(k)}\sim B_k(n,p)$,则 $N_n^{(k)}$

收稿日期:2016-03-08
基金项目:国家自然科学基金(71271026)
Foundation item: National Natural Science Foundation of China(71271026)
第一作者:邵吉光(1974—),男,山东即墨人,副教授,博士.研究方向为概率统计.**email**:jgshao@bjtu.edu.cn.
引用格式:邵吉光,王军.Bernoulli 试验中 k 阶概率分布的众数[J].北京交通大学学报,2017,41(3):114-119.
SHAO Jiguang, WANG Jun. On the modes of distributions of order k in Bernoulli trials[J]. Journal of Beijing University, 2017, 41(3):114-119.(in Chinese)

的概率分布律为

$$P(N_n^{(k)}=r)=\sum_{s=0}^{k-1}\sum_{\substack{(m_1,m_2,\cdots,m_k)\\ m_1+2m_2+\cdots+km_k\\ =n-s-kr}}\binom{m_1+\cdots+m_k+r}{m_1,m_2,\cdots,m_k,r}\left(\frac{q}{p}\right)^{m_1+\cdots+m_k}p^n,$$

$r=0,1,2,\cdots,[n/k]$. 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

引理 4　设随机变量 $N_n^{(k)}\sim B_k(n,p)$，则 $N_n^{(k)}$ 的数学期望为

$$EN_n^{(k)}=\sum_{m=0}^{[n/k]}\{1+(n-mk)q\}p^{mk}.$$

我们知道，众数(mode)[16-18]是概率分布的一个重要统计量，即概率最大时随机变量对应的取值.它可广泛应用于抽样检查理论研究[19-20]. 许多经典分布的众数已经为人熟知，例如，几何分布的众数是 1，参数 λ 为正整数时 Poisson 分布的众数是 λ 或 $(\lambda-1)$ 等等. 然而，许多高阶分布诸如 k 阶负二项分布、k 阶 Poisson 分布和 k 阶二项分布等等，它们的众数尚属未知.文献[16-18]讨论了某些特定参数下 k 阶负二项分布 $NB_k(r,p)$ 和 k 阶 Poisson 分布 $P_k(\lambda)$ 的众数问题.延续上述文献，本文作者对这两个分布的众数做进一步的研究，此外，对与它们密切相关的 k 阶二项分布 $B_k(n,p)$ 的众数，也做了一些讨论.

1　k 阶负二项分布的众数

本节约定参数 $p=0.5$. 论证过程中使用了 Fibonacci 数列及其推广形式.事实上，它在概率分布理论当中有着广泛而重要的应用[21-24].

定理 1　当参数 $k=2$，$r=1$ 时，随机变量 $X_{2,1}\sim NB_2(1,0.5)$ 有唯一的众数 $m_{2,1}=2$.

证明　记随机变量 $X_{2,1}$ 的概率母函数为 $G_{2,1}(x)$，则由引理 1 得到

$$G_{2,1}(x)=\frac{0.5^2x^2(1-0.5x)}{1-x+0.5^3x^3}=\frac{x^2}{2^2}\,\frac{4}{4-2x-x^2}=$$

$$\frac{x^2}{2^2}\,\frac{4}{(\sqrt5+1+x)(\sqrt5-1-x)}=$$

$$\frac{x^2}{2^2}\,\frac{2}{\sqrt5}\left(\frac{1}{\sqrt5+1+x}+\frac{1}{\sqrt5-1-x}\right)=$$

$$\frac{x^2}{2^2}\,\frac{2}{\sqrt5}\left[\frac{1}{\sqrt5+1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{\sqrt5+1}\right)^n+\frac{1}{\sqrt5-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\sqrt5-1}\right)^n\right]=$$

$$\frac{x^2}{2^2}\,\frac{2}{\sqrt5}\left[\frac{\sqrt5-1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt5}{4}\right)^n x^n+\frac{1+\sqrt5}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+\sqrt5}{4}\right)^n x^n\right]=$$

$$\frac{x^2}{2^2}\,\frac{1}{\sqrt5}\left[\frac{\sqrt5-1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\frac{x^n}{2^n}+\frac{1+\sqrt5}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n\frac{x^n}{2^n}\right]=$$

$$\frac{x^2}{2^2}\,\frac{1}{\sqrt5}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+1}\frac{x^n}{2^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n+1}\frac{x^n}{2^n}\right]=$$

$$\frac{x^2}{2^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt5}\left[\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n+1}\right]\frac{x^n}{2^n}=$$

$$\frac{x^2}{2^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{2^n}x^n \tag{1}$$

其中 $\{F_n\}_0^\infty$ 为著名的 Fibonacci 数列，满足：$F_0=F_1=0$，$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$，$n\geqslant 2$. 由此得到随机变量 $X_{2,1}$ 的概率分布律

$P_{n+2}=P(X_{2,1}=n+2)=F_n/2^{n+2}$，$n=0,1,\cdots$.

考虑到 $F_1<2F_0$，$F_2=2F_1$，且当 $n\geqslant 2$ 时有 $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}<2F_n$，结合 $P_{n+2}-P_{n+3}=(2F_n-F_{n+1})/2^{n+3}$，因此 $P_2>P_3$，$P_3=P_4>P_5>P_6>\cdots$.从而有 $P_2=\max\{P_{n+2},n\geqslant 0\}$，所以 $m_{2,1}=2$. 证毕.

为了讨论参数 $k=2$，$r\geqslant 2$ 时随机变量 $X_{2,r}\sim NB_2(r,0.5)$ 的众数问题，我们记

$F_n^{(1)}=F_n$，

$F_n^{(2)}=F_0F_n+F_1F_{n-1}+\cdots+F_nF_0$，

$F_n^{(3)}=F_0F_n^{(2)}+F_1F_{n-1}^{(2)}+\cdots+F_nF_0^{(2)}$，$\cdots$，

$F_n^{(r)}=F_0F_n^{(r-1)}+F_1F_{n-1}^{(r-1)}+\cdots+F_nF_0^{(r-1)}$.

称 $\{F_n^{(r)}\}_0^\infty$ 为 r 阶 Fibonacci 数列，$r=1,2,3,\cdots$.则有下面的性质：

$F_n^{(1)}\equiv F_n$；$F_0^{(r)}=1$；$F_1^{(r)}=r$；

$F_2^{(r)}=r(r+3)/2$；

$F_{n+1}^{(r)}=F_n^{(r)}+F_{n-1}^{(r)}+F_{n+1}^{(r-1)}$，$r\geqslant 2$.

定理 2　当参数 $k=2$ 时，随机变量 $X_{2,r}\sim NB_2(r,0.5)$ 的概率母函数为

$$G_{2,r}(x)=\frac{x^{2r}}{2^{2r}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n^{(r)}}{2^n}x^n,\ r=1,2,\cdots.$$

证明　(归纳法)当 $r=1$ 时结论显然.设 $(r-1)$ 时成立，即有

$$G_{2,r-1}(x)=\frac{x^{2(r-1)}}{2^{2(r-1)}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n^{(r-1)}}{2^n}x^n.$$

结合引理 1 和式(1)，得到

$$G_{2,r}(x)=G_{2,r-1}(x)G_{2,1}(x)=\frac{x^{2(r-1)}}{2^{2(r-1)}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n^{(r-1)}}{2^n}x^n\cdot$$

$$\frac{x^2}{2^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{2^n}x^n=\frac{x^{2r}}{2^{2r}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n^{(r-1)}}{2^n}x^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{2^n}x^n=$$
$$\frac{x^{2r}}{2^{2r}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_0F_n^{(r-1)}+F_1F_{n-1}^{(r-1)}+\cdots+F_nF_0^{(r-1)}}{2^n}x^n=$$
$$\frac{x^{2r}}{2^{2r}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n^{(r)}}{2^n}x^n.$$

定理得证.

定理 3 当参数 $k=2$, $r=2$ 时,随机变量 $X_{2,2}\sim NB_2(2,0.5)$ 的众数为 $m_{2,2}=6,7,8$.

证明 记随机变量 $X_{2,2}$ 的概率分布律为 $P_n=P(X_{2,2}=n)$,由定理 2 得 $P_{n+4}=F_n^{(2)}/2^{n+4}$,通过计算 2 阶 Fibonacci 数列 $\{F_n^{(2)}\}_0^{\infty}$ 各项值得 $P_4=F_0^{(2)}/2^4=1/2^4$, $P_5=F_1^{(2)}/2^5=2/2^5$, $P_6=F_2^{(2)}/2^6=5/2^6$, $P_7=F_3^{(2)}/2^7=10/2^7$, $P_8=F_4^{(2)}/2^8=20/2^8$,因此有 $P_4=P_5<P_6=P_7=P_8$.

当项数 $n+4\geqslant 9$ 时,利用 2 阶 Fibonacci 数列的性质,我们有

$$P_{n+4}-P_{n+3}=F_n^{(2)}/2^{n+4}-F_{n-1}^{(2)}/2^{n+3}=$$
$$[F_n^{(2)}-2F_{n-1}^{(2)}]/2^{n+4}=[F_n+F_{n-2}^{(2)}-F_{n-1}^{(2)}]/2^{n+4}=$$
$$[F_n-F_{n-1}-F_{n-3}^{(2)}]/2^{n+4}=[F_{n-2}-F_{n-3}^{(2)}]/2^{n+4}=$$
$$[F_{n-3}-F_{n-4}-F_{n-3}^{(2)}]/2^{n+4}<0.$$

这意味着 $P_8>P_9>P_{10}>\cdots$.综上述,有 $P_6=P_7=P_8=\max\{P_{n+4},n\geqslant 0\}$.证毕.

定理 4 当参数 $k=2$, $r=3$ 时,随机变量 $X_{2,3}\sim NB_2(3,0.5)$ 的众数为 $m_{2,3}=13$.

证明 记随机变量 $X_{2,3}$ 的概率分布律为 $P_n=P(X_{2,3}=n)$,由定理 2 得 $P_{n+6}=F_n^{(3)}/2^{n+6}$,通过计算 3 阶 Fibonacci 数列 $\{F_n^{(3)}\}_0^{\infty}$ 各项值得 $P_6=F_0^{(3)}/2^6=1/2^6$, $P_7=F_1^{(3)}/2^7=3/2^7$, $P_8=F_2^{(3)}/2^8=9/2^8$, $P_9=F_3^{(3)}/2^9=22/2^9$, $P_{10}=F_4^{(3)}/2^{10}=51/2^{10}$, $P_{11}=F_5^{(3)}/2^{11}=111/2^{11}$, $P_{12}=F_6^{(3)}/2^{12}=233/2^{12}$, $P_{13}=F_7^{(3)}/2^{13}=474/2^{13}$, $P_{14}=F_8^{(3)}/2^{14}=942/2^{14}$, $P_{15}=F_9^{(3)}/2^{15}=1836/2^{15}$.因此有 $P_6<P_7<P_8<P_9<P_{10}<P_{11}<P_{12}<P_{13}$ 以及 $P_{13}>P_{14}>P_{15}$.

记 $\delta_n=P_n-P_{n-1}$ 且假设 $\delta_n<0$, $\delta_{n+1}<0$,则由

$$\delta_n=P_n-P_{n-1}=F_{n-6}^{(3)}/2^n-F_{n-7}^{(3)}/2^{n-1}=$$
$$[F_{n-6}^{(3)}-2F_{n-7}^{(3)}]/2^n=$$
$$[F_{n-6}^{(2)}+F_{n-8}^{(3)}-F_{n-7}^{(3)}]/2^n=$$
$$[F_{n-6}^{(2)}-F_{n-7}^{(2)}-F_{n-9}^{(3)}]/2^n=$$
$$[F_{n-8}^{(2)}+F_{n-6}-F_{n-9}^{(3)}]/2^n<0$$

得到

$$2^n\delta_n=F_{n-8}^{(2)}+F_{n-6}-F_{n-9}^{(3)}<0$$

以及

$$2^{n+1}\delta_{n+1}=F_{n-7}^{(2)}+F_{n-5}-F_{n-8}^{(3)}<0$$

则

$$2^{n+2}\delta_{n+2}=F_{n-6}^{(2)}+F_{n-4}-F_{n-7}^{(3)}=$$
$$(F_{n-7}^{(2)}+F_{n-8}^{(2)}+F_{n-6})+(F_{n-5}+F_{n-6})-$$
$$(F_{n-8}^{(3)}+F_{n-9}^{(3)}+F_{n-7}^{(2)})=$$
$$(F_{n-8}^{(2)}+F_{n-6}-F_{n-9}^{(3)})+F_{n-5}+F_{n-6}-F_{n-8}^{(3)}=$$
$$2^n\delta_n+F_{n-5}+F_{n-6}-F_{n-8}^{(3)}=$$
$$2^n\delta_n+(F_{n-5}+F_{n-7}^{(2)}-F_{n-8}^{(3)})+F_{n-6}-F_{n-7}^{(2)}=$$
$$2^n\delta_n+2^{n+1}\delta_{n+1}+F_{n-6}-F_{n-7}^{(2)}=$$
$$2^n\delta_n+2^{n+1}\delta_{n+1}+(F_{n-7}+F_{n-8}-F_{n-7}^{(2)})<0.$$

因此有 $\delta_{n+2}<0$.

这表明,只要有连续两个 δ_n 小于零,则后面的 δ_n 均小于零.由 $P_{13}>P_{14}>P_{15}$ 得到 $\delta_{14}<0$ 和 $\delta_{15}<0$,因此 $\delta_n<0$, $n=16,17,18,\cdots$.即有 $P_{15}>P_{16}>P_{17}>P_{18}>\cdots$.所以 $P_{13}=\max\{P_{n+6},n\geqslant 0\}$.证毕.

注记 通过更复杂的推导论证可得到随机变量 $X_{2,4}$ 的众数 $m_{2,4}=19$; $X_{2,5}$ 的众数 $m_{2,5}=25$; $X_{2,6}$ 的众数 $m_{2,6}=31$; $X_{2,7}$ 的众数 $m_{2,7}=37$; $X_{2,8}$ 的众数 $m_{2,8}=43$; $X_{2,9}$ 的众数 $m_{2,9}=49$; $X_{2,10}$ 的众数 $m_{2,10}=55$.由此可得,随机变量 $X_{2,r}\sim NB_2(r,0.5)$ 的众数 $m_{2,r}=6r-5$, $r\geqslant 3$.

2 k 阶 Poisson 分布的众数

约定参数 $k=2$,展开本节的讨论.

定理 5 当参数 $0<\lambda<\sqrt{3}-1$ 时,随机变量 $Z_2\sim P_2(\lambda)$ 的众数为 $m_{Z_2}=0$;当参数 $\lambda=\sqrt{3}-1$ 时,众数为 $m_{Z_2}=0$ 或 2;当参数 $\sqrt{3}-1<\lambda\leqslant 1$ 时,众数为 $m_{Z_2}=2$.

证明 由引理 2 得

$$P_m=P(Z_2=m)=\sum_{\substack{(m_1,m_2)\\ m_1+2m_2=m}}\frac{\lambda^{m_1+m_2}}{m_1!\ m_2!}e^{-2\lambda},$$

所以有 $P_0=e^{-2\lambda}$, $P_1=\lambda e^{-2\lambda}$, $P_2=(\lambda+\lambda^2/2)e^{-2\lambda}$.注意到 $0<\lambda\leqslant 1$,当 $n\geqslant 1$ 时,有

$$P_{2n}-P_{2n+1}=$$
$$\sum_{s=0}^{n}\frac{\lambda^{2n-s}e^{-2\lambda}}{(2n-2s)!\ s!}-\sum_{s=0}^{n}\frac{\lambda^{2n+1-s}e^{-2\lambda}}{(2n+1-2s)!\ s!}\geqslant$$
$$\sum_{s=0}^{n}\frac{\lambda^{2n-s}e^{-2\lambda}}{(2n-2s)!\ s!}-\sum_{s=0}^{n}\frac{\lambda^{2n-s}e^{-2\lambda}}{(2n+1-2s)!\ s!}=$$
$$\sum_{s=0}^{n}\left[\frac{\lambda^{2n-s}e^{-2\lambda}}{(2n-2s)!\ s!}-\frac{\lambda^{2n-s}e^{-2\lambda}}{(2n+1-2s)!\ s!}\right]>0,$$

$$P_{2n+1}-P_{2n+2}=$$
$$\sum_{s=0}^{n}\frac{\lambda^{2n+1-s}e^{-2\lambda}}{(2n+1-2s)!\ s!}-\sum_{s=0}^{n+1}\frac{\lambda^{2n+2-s}e^{-2\lambda}}{(2n+2-2s)!\ s!}=$$
$$\sum_{s=0}^{n-1}\left[\frac{\lambda^{2n+1-s}e^{-2\lambda}}{(2n+1-2s)!\ s!}-\frac{\lambda^{2n+2-s}e^{-2\lambda}}{(2n+2-2s)!\ s!}\right]+$$

$$e^{-2\lambda}\left(\frac{\lambda^{n+1}}{1!\ n!}-\frac{\lambda^{n+2}}{2!\ n!}-\frac{\lambda^{n+1}}{0!\ (n+1)!}\right)>0.$$

因此当 $0<\lambda\leqslant 1$ 时有 $P_2>P_3>P_4>\cdots$. 综上述，有结论：

当 $\lambda=\sqrt{3}-1$ 时，$P_0=P_2=\max\{P_m,m\geqslant 0\}$，即得众数 $m_{Z_2}=0$ 或 2；当 $0<\lambda<\sqrt{3}-1$ 时，$P_0=\max\{P_m,m\geqslant 0\}$，即得众数 $m_{Z_2}=0$；当 $\sqrt{3}-1<\lambda\leqslant 1$ 时，$P_2=\max\{P_m,m\geqslant 0\}$，即得众数 $m_{Z_2}=2$. 证毕.

定理 6　当参数 $\lambda>1$ 且 $\lambda\in N$ 时，随机变量 $Z_2\sim P_2(\lambda)$ 的众数为 $m_{Z_2}=3\lambda-1$.

证明　由引理 2 得随机变量 $Z_2\sim P_2(\lambda)$ 的概率母函数为

$$G(x)=G(Z_2;x)=e^{\lambda(x+x^2-2)},$$

对其求导，得

$$G'(x)=\lambda(1+2x)G(x),$$

将上述函数两边同时求 $(n-1)$ 阶导数并令 $x=0$ 得

$$G^{(n)}(0)=\lambda G^{(n-1)}(0)+2\lambda(n-1)G^{(n-2)}(0).$$

结合概率母函数 $G(x)$ 与概率分布律 P_n 之间的关系 $P_n=G^{(n)}(0)/n!$　可得

$$nP_n=\lambda(P_{n-1}+2P_{n-2})\tag{2}$$

假定随机变量 Z_2 的众数是 $m_{Z_2}=n^*$，那么由式(2)得

$$n^*P_{n^*}=\lambda(P_{n^*-1}+2P_{n^*-2})\leqslant 3\lambda P_{n^*},$$

得到

$$n^*\leqslant 3\lambda\tag{3}$$

令 $\delta_0=P_0>0$, $\delta_n=P_n-P_{n-1}$，$n\geqslant 1$. 则有

$$\delta_1=P_1-P_0=(\lambda-1)e^{-2\lambda}>0,$$
$$\delta_2=P_2-P_1=\lambda^2e^{-2\lambda}/2>0\tag{4}$$

由式(2)得

$$\delta_{n+2}=\frac{\lambda(\lambda+n)\delta_n}{(n+1)(n+2)}+\frac{\lambda(3\lambda-n-4)}{(n+1)(n+2)}P_{n-1}\tag{5}$$

因此，当 $1\leqslant n\leqslant 3\lambda-4$ 时，可得 $\delta_{n+2}>0$，即

$$\delta_3>0,\delta_4>0,\delta_5>0,\cdots,\delta_{3\lambda-1}>0\tag{6}$$

结合式(4)和(6)得到 $P_0<P_1<P_2<\cdots<P_{3\lambda-2}$，从而可知

$$3\lambda-2\leqslant n^*\tag{7}$$

将式(3)和(7)联立，得

$$3\lambda-2\leqslant n^*\leqslant 3\lambda\tag{8}$$

由式(2)可得

$$n\delta_n=(\lambda-n)\delta_{n-1}+(3\lambda-n)P_{n-2}\tag{9}$$

令 $n=3\lambda$ 代入上式(9)得

$$\delta_{3\lambda}=-2\delta_{3\lambda-1}\tag{10}$$

令 $n=3\lambda-3$，$3\lambda-5$，$3\lambda-7$ 代入式(9)得

$$\begin{cases}\delta_{3\lambda-1}=\dfrac{\lambda(4\lambda-3)\delta_{3\lambda-3}-\lambda P_{3\lambda-4}}{(3\lambda-2)(3\lambda-1)}\\ \delta_{3\lambda-3}=\dfrac{\lambda(4\lambda-5)\delta_{3\lambda-5}+\lambda P_{3\lambda-6}}{(3\lambda-4)(3\lambda-3)}\\ \delta_{3\lambda-5}=\dfrac{\lambda(4\lambda-7)\delta_{3\lambda-7}+3\lambda P_{3\lambda-8}}{(3\lambda-6)(3\lambda-5)}\end{cases}\tag{11}$$

仍由式(2)可得

$$\begin{cases}P_{3\lambda-4}=\dfrac{\lambda(7\lambda-10)P_{3\lambda-6}+2\lambda^2P_{3\lambda-7}}{(3\lambda-4)(3\lambda-5)}\\ P_{3\lambda-6}=\dfrac{\lambda P_{3\lambda-7}+2\lambda P_{3\lambda-8}}{3\lambda-6}\end{cases}\tag{12}$$

结合式(11)和(12)，得到

$$\frac{(3\lambda-1)\cdots(3\lambda-6)}{\lambda^3}\delta_{3\lambda-1}=$$
$$(64\lambda^3-267\lambda^2+360\lambda-156)\delta_{3\lambda-7}+$$
$$(3\lambda^2+24\lambda-36)P_{3\lambda-8}>0\tag{13}$$

结合式(10)及(13)，可以得到 $\delta_{3\lambda-1}<0$ 和 $\delta_{3\lambda}>0$，这意味着

$$P_{3\lambda-1}>P_{3\lambda-2}\text{ 且 }P_{3\lambda-1}>P_{3\lambda}.$$

结合式(8)可得 Z_2 的众数是 $m_{Z_2}=n*=3\lambda-1$. 证毕.

3　k 阶二项分布的众数

仅在约定参数 $p=0.5$, $k=2$, $n=2n_0$ 情形下对随机变量 $N_{2n_0}^{(2)}\sim B_2(2n_0,0.5)$ 进行讨论.此时由引理 4，随机变量 $N_{2n_0}^{(2)}$ 的数学期望是

$$EN_{2n_0}^{(2)}=\sum_{m=0}^{[2n_0/2]}\{1+(2n_0-2m)0.5\}0.5^{2m}=$$
$$\frac{n_0}{3}-\frac{1-1/4n_0}{9},$$

我们给出猜想：$N_{2n_0}^{(2)}$ 的众数 $m_{N_{2n_0}^{(2)}}=[(n_0-1)/3]$. 下面仅举一例，对其进行验证.

取 $n=2n_0=10$，由引理 3 得

$$P(N_{10}^{(2)}=0)=\frac{1}{2^{10}}\binom{10}{10,0,0}+\frac{1}{2^{10}}\binom{9}{8,1,0}+\cdots$$
$$+\frac{1}{2^{10}}\binom{5}{0,5,0}+\frac{1}{2^{10}}\binom{9}{9,0,0}+$$
$$\frac{1}{2^{10}}\binom{8}{7,1,0}+\cdots+\frac{1}{2^{10}}\binom{5}{1,4,0}=\frac{144}{1024},$$

$$P(N_{10}^{(2)}=1)=\frac{1}{2^{10}}\binom{9}{8,0,1}+\frac{1}{2^{10}}\binom{8}{6,1,1}+\cdots$$
$$+\frac{1}{2^{10}}\binom{5}{0,4,1}+\frac{1}{2^{10}}\binom{8}{7,0,1}+\frac{1}{2^{10}}\binom{7}{5,1,1}+$$
$$\frac{1}{2^{10}}\binom{6}{3,2,1}+\frac{1}{2^{10}}\binom{5}{1,3,1}=\frac{365}{1024},$$

$$P(N_{10}^{(2)}=2)=\frac{1}{2^{10}}\binom{8}{6,0,2}+\frac{1}{2^{10}}\binom{7}{4,1,2}+$$

$$\frac{1}{2^{10}}\binom{6}{2,2,2}+\frac{1}{2^{10}}\binom{5}{0,3,2}+\frac{1}{2^{10}}\binom{7}{5,0,2}+$$
$$\frac{1}{2^{10}}\binom{6}{3,1,2}+\frac{1}{2^{10}}\binom{5}{1,2,2}=\frac{344}{1024},$$
$$P(N_{10}^{(2)}=3)=\frac{1}{2^{10}}\binom{7}{4,0,3}+\frac{1}{2^{10}}\binom{6}{2,1,3}+$$
$$\frac{1}{2^{10}}\binom{5}{0,2,3}+\frac{1}{2^{10}}\binom{6}{3,0,3}+\frac{1}{2^{10}}\binom{5}{1,1,3}=\frac{145}{1024},$$
$$P(N_{10}^{(2)}=4)=\frac{1}{2^{10}}\binom{6}{2,0,4}+\frac{1}{2^{10}}\binom{5}{0,1,4}+$$
$$\frac{1}{2^{10}}\binom{5}{1,0,4}=\frac{25}{1024},$$
$$P(N_{10}^{(2)}=5)=\frac{1}{2^{10}}\binom{5}{0,0,5}=\frac{1}{1024},$$

容易看出 $P(N_{10}^{(2)}=1)=\max\limits_{0\leqslant r\leqslant 5}\{P(N_{10}^{(2)}=r)\}$，即有 $m_{N_{10}^{(2)}}=1$，而由猜想众数公式可得 $m_{N_{10}^{(2)}}=[(n_0-1)/3]=[(5-1)/3]=1$，与实际结果一致.

4 结论

本文讨论了独立 Bernoulli 试验序列中的三个 k 阶分布的众数问题：

1) k 阶负二项分布 $NB_k(r,p)$ 在参数 $p=0.5$，$k=2$ 时有 $m_{2,1}=2$；$m_{2,2}=6,7,8$；$m_{2,3}=13$，一般地有 $m_{2,r}=6r-5, r\geqslant 3$.

2) k 阶 Poisson 分布 $P_k(\lambda)$ 当 $k=2, 0<\lambda<\sqrt{3}-1$ 时，有 $m_{Z_2}=0$；当 $k=2, \lambda=\sqrt{3}-1$ 时，有 $m_{Z_2}=0$ 或 2；当 $k=2, \sqrt{3}-1<\lambda\leqslant 1$ 时，有 $m_{Z_2}=2$；当 $k=2, \lambda>1$ 且 $\lambda\in N$ 时，有 $m_{Z_2}=3\lambda-1$.

3) k 阶二项分布 $B_k(n,p)$ 当参数 $p=0.5$，$k=2$，$n=2n_0$ 时有猜想 $m_{N_{2n_0}^{(2)}}=[(n_0-1)/3]$.

关于高阶分布众数的研究是概率统计理论的新领域，其中的诸多问题包括本文提出的猜想，有待更进一步探讨.

参考文献(References)：

[1] 韩清. 游程的分布理论[J]. 应用概率统计，1999，15(2)：199－212.
HAN Q. Exact distribution theory of runs[J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics，1999，15(2)：199－212. (in Chinese)

[2] PHILIPPOU A N，MAKRI F S. Successes，runs and longest runs[J]. Statistics and Probability Letters，1986，4(4)：211－215.

[3] PHILIPPOU A N，MAKRI F S. Longest success runs and Fibonacci-type polynomials [J]. Fibonacci Quarterly，1985，23(4)：338－346.

[4] PHILIPPOU A N，MUWAFI A A. Waiting for the kth consecutive success and the Fibonacci sequence of order k [J]. Fibonacci Quarterly，1982，20(1)：28－32.

[5] FU J C，KOUTRAS M V. Distribution theory of runs：A Markov chain approach[J]. Journal of the American Statistical Association，1994，89(427)：1050－1058.

[6] MUSELLI M. Simple expressions for success run distributions in Bernoulli trials[J]. Statistics and Probability Letters，1996，31(2)：121－128.

[7] GODBOLE A P. Specific formulae for some success run distributions [J]. Statistics and Probability Letters，1990，10(2)：119－124.

[8] 邵吉光. 独立试验次数的数字特征[J].北京交通大学学报，2014，38(6)：106－111.
SHAO J G. Numerical characteristics for the number of independent trials[J]. Journal of Beijing Jiaotong University，2014，38(6)：106－111. (in Chinese)

[9] PHILIPPOU A N，GEORGHIOU C，PHILIPPOU G N. A generalized geometric distribution and some of its properties[J]. Statistics and Probability Letters，1983，1(4)：171－175.

[10] BARRY M J，BELLO A J L. The moment generating function of the geometric distribution of order k [J]. Fibonacci Quarterly，1993，31(2)：178－180.

[11] PHILIPPOU A N. The negative binomial distribution of order k and some of its properties[J]. Bionetrical Journal，1984，26(7)：789－794.

[12] AKI S，HIRANO K. Distributions of numbers of failures and successes until the first consecutive k successes[J]. Annals of the Institute of Statistical Mathematics，1994，46(1)：193－202.

[13] 邵吉光，付盛. 转移概率流图理论对 Pascal 分布的推广研究[J]. 应用数学学报，2015，38(2)：293－302.
SHAO J G，FU S. Generalization and research on Pascal distribution by transition probability flow graphs methods[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica，2015，38(2)：293－302.(in Chinese)

[14] 邵吉光，王秋媛. 多维几何分布与多维 Poisson 分布[J]. 北京交通大学学报，2015，39(3)：122－128.
SHAO J G，WANG Q Y. Multidimensional geometric distribution and multidimensional Poisson distribution in independent trials[J]. Journal of Beijing Jiaotong University，2015，39(3)：122－128. (in Chinese)

[15] AKI S，HIRANO K. Estimation of parameters in the discrete distributions of order k [J]. Annals of the Institute of Statistical Mathematics，1989，41(1)：47－61.

[16] SHAO J G，FU S. On the modes of the negative binomial distribution of order k [J]. Journal of Applied Sta-

tistics，2016，43(11)：2131－2149.

[17] PHILIPPOU A N. A note on the modes of the Poisson distribution of order k [J]. Fibonacci Quarterly, 2014, 52(3): 203－205.

[18] GEORGHIOU C, PHILIPPOU A N, SAGHAFI A. On the modes of the Poisson distribution of order k [J]. Fibonacci Quarterly, 2013, 51(1): 44－48.

[19] SHAO J G，WANG J.Dynamic average outgoing quality on CSP-3-P[C]//Proceedings of 2010 Second ETP/IITA World Congress in Applied Computing，Computer Science，and Computer Engineering.Shenzhen，China，2010：119－122.

[20] GOVINDARAJU K, BALAMURALI S. Tightened single-level continuous sampling plan[J]. Journal of Applied Statistics，1998，25(4)：451－461.

[21] VERNER E，HOGGATT JR.Convolution triangles for generalized Fibonacci numbers[J].Fibonacci Quarterly，1970，8(2)：158－171.

[22] PHILIPPOU A N, GEORGHIOU C. Convolutions of Fibonacci-type polynomials of order k and the negative binomial distributions of the same order[J]. Fibonacci Quarterly, 1989, 27(3): 209－216.

[23] PHILIPPOU A N, GEORGHIOU C, PHILIPPOU G N. Fibonacci-type polynomials of order k with probability applications[J]. Fibonacci Quarterly, 1985, 23(2): 100－105.

[24] SHANE H D. A Fibonacci probability function[J]. Fibonacci Quarterly, 1973, 11(5): 517－522.

（上接第 113 页）

[7] 伍光胜，宋信忠，郑明辉.多线程技术及其应用的研究[J].计算机应用研究，2001，18(1)：33－36.
WU Guangsheng, SONG Xinzhong, ZHENG Minghui. Study and application of multithread technology[J].Application Research of Computers，2001，18(1)：33－36.(in Chinese)

[8] 刘青峰.疲劳裂纹扩展速率与门槛值自动化测试系统研究[D].北京：北京工业大学，2000.
LIU Qingfeng. Automation test system research of fatigue crack growth rate and the threshold value[D]. Beijing: Beijing University of Technology, 2000. (in Chinese)

[9] PARIS P C, ERDOGAN F. A critical analysis of crack propagation laws[J].Journal of Basic Engineering，1963，85(4): 528－534.

[10] ASTM Committee on Standards. Standard test method for measurement of fatigue crack growth rates：E647－2000[S]. Philadelphia: American Society for Testing and Materials, 2001.

[11] 汤晓华，刘九庆，陈强，等.低周疲劳裂纹扩展速率的试验系统[J]. 东北林业大学学报，2006，34(1)：78－80.
TANG Xiaohua, LIU Jiuqing, CHEN Qiang, et al. Test system of low-cycle fatigue crack growth rate[J]. Journal of Northeast Forestry University, 2006, 34(1)：78－80.(in Chinese)

[12] 高镇同，蒋新桐，熊峻江，等.疲劳性能试验设计和数据处理[M].北京：北京航空航天出版社，1999：6－20.
GAO Zhentong，JIANG Xintong，XIONG Junjiang，et al. Experiment design and data processing of fatigue [M].Beijing: Beijing Aerospace Press，1999：6－20.(in Chinese)